PEMODELAN NILAI TUKAR RUPIAH TERHADAP $US MENGGUNAKAN *HIDDEN* MARKOV*

BERLIAN SETIAWATY dan DEWI NOVIYANTI SARI

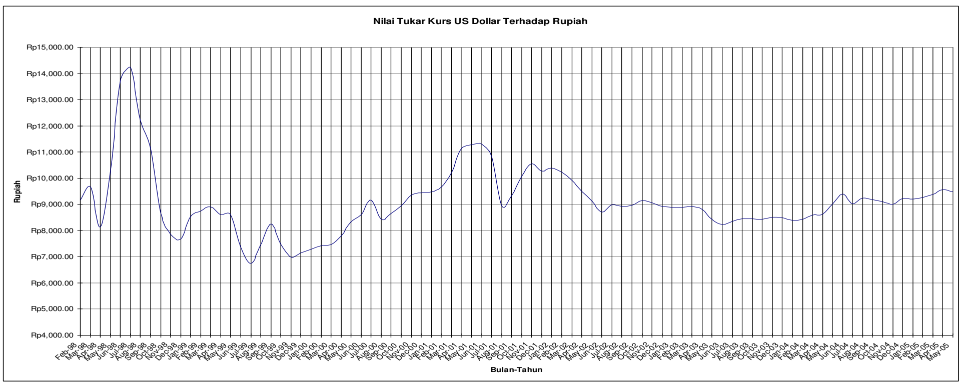
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

ABSTRAK. Perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dari tahun 1998 sampai dengan 2005 dicoba dimodelkan dengan menggunakan *Hidden* Markov (Elliott, et. al. 1995) Pendugaan parameter model dilakukan mengunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization* yang melibatkan perubahan ukuran. Hasil yang diperoleh kurang baik karena galat antara nilai harapan dengan nilai sebenarnya cukup besar.

Kata kunci: Rantai Markov, model *Hidden* Markov, metode *Expectation Maximization*, perubahan ukuran.

1. PENDAHULUAN

Nilai tukar Rupiah telah mengalami perubahan yang berfluktuasi. Bahkan pada saat krisis ekonomi pada tahun 1998 fluktuasi tersebut sangat besar dan tidak beraturan (Gambar 1.1). Hal ini tidak saja dipengaruhi oleh faktor ekonomi, tetapi juga oleh situasi politik dalam negeri yang tidak stabil, pergantian pemerintahan yang tidak berjalan dengan semestinya dan situasi keamanan yang kurang terjamin.



Gambar 1.1 Nilai tukar Rupiah terhadap $US dari tahun 1998 s/ d 2005
(Sumber: Bank of Canada 21 Agustus 2005)

Untuk menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah tersebut dibangun suatu model matematis. Pada penelitian ini model *Hidden Markov* Elliott, et. al. (1995) dipilih karena model ini memperkenankan terjadinya perubahan parameter pada setiap *state*, sehingga diharapkan lebih fleksibel dalam menggambarkan perubahan-perubahan yang dramatis seperti yang terjadi pada nilai tukar Rupiah terhadap $US.

Pendugaan parameter model dilakukan menggunakan metode *Maximum likelihood* dan metode *expectation maximization* serta data histories nilai tukar Rupiah. Dengan diketahuinya seluruh parameter, model *Hidden* Markov kemudian dipakai untuk menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah selama ini

Tulisan ini dimulai dengan pemodelan nilai tukar Rupiah menggunakan *Hidden* Markov. Pada bagian 3 dibahas Pendugaan Parameter model. Pada bagian 4 dibahas interpretasi model nilai tukar Rupiah. Sebagai penutup disertakan pula kesimpulan dan saran.

2. MODEL HIDDEN MARKOV

Pada bagian ini kita memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dalam kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Mei 2005, menggunakan model *Hidden* Markov Elliott, et. al. (1995).

Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US diasumsikan sebagai *state* dari suatu rantai Markov $\{X_k\}$. Misalkan banyaknya faktor tersebut adalah *N*. Pada setiap *state*, data nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh peubah acak Y_k yang menyebar dengan sebaran tertentu pada ruang peluang (Ω, F, P).

Misalkan bahwa hubungan antara $\{X_k\}$ dan $\{Y_k\}$ ditentukan oleh persamaan:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + V_{k+1} \\ Y_{k+1} &= \langle c, X_k \rangle + \langle \sigma, X_k \rangle \omega_{k+1} \qquad k \in \aleph \end{aligned}$$

di mana

- $\{X_k\}$ adalah rantai Markov dengan matriks transisi $A = (a_{ji})_{N\times N}$, di mana $a_{ji} = P(X_k = e_j \mid X_{k-1} = e_i)$, $i, j = 1, 2, ..., N$.
- V_{k+1} adalah martingale *increments.*
- ω_k adalah peubah acak yang bebas stokastik identik menyebar $N(0,1)$.
- $c = (c_1, c_2, ..., c_N) \in \Re^N$.
- $\sigma_i > 0,\ i = 1, 2, ..., N.$

Asumsikan bahwa penyebab perubahan nilai tukar Rupiah tidak diketahui atau tidak diamati. Sehingga proses $\{X_k\}$ tersembunyi (*hidden*) di balik data pengamatan nilai tukar Rupiah $\{Y_k\}$. Jadi pasangan $\{(X_k, Y_k)\}$ merupakan model *Hidden* Markov Elliott et. al. (1995).

Parameter model di atas berbentuk

$$\theta = \{(a_{ji}),\ 1 \le i, j \le N;\ c_i,\ 1 \le i \le N;\ \sigma_i,\ 1 \le i \le N\}.$$

Menggunakan data pengamatan nilai tukar Rupiah Y_k pada kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Mei 2005 parameter model akan diduga. Proses pendugaan parameter menggunakan metode *maximum likelihood* dan metode *expectation* *maximization* yang algoritmanya diambil dari Setiawaty dan Kristina (2005). Dalam proses pendugaan parameter model, diambil $N = 2$.

Data nilai tukar Rupiah yang diperoleh dari Bank of Canada (21 Agustus 2005) adalah rataan nilai tukar Rupiah harian. Untuk diskretisasi waktu dan untuk mengurangi banyaknya data, diambil rataan perbulan dari data harian tersebut. Sehingga Y_k menyatakan rataan nilai tukar Rupiah terhadap \$US pada bulan ke k, $k \in \aleph$, dengan $k = 1$ adalah bulan Februari 1998. Sehingga dalam kurun waktu Februari 1998 sampai dengan Mei 2005 diperoleh 88 buah data.

3. PENDUGAAN PARAMETER MODEL

3.1 Metode *Expectation Maximization* (Metode EM)

Metode EM dikembangkan oleh Baum and Petrie (1966) dengan ide dasar sebagai berikut.

Misalkan $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ adalah koleksi ukuran peluang yang terdefinisi pada ruang (Ω, G) dan kontinu absolut terhadap P_0. Misalkan $\mathrm{Y} \subset \mathrm{G}$. Definisikan fungsi *likelihood* untuk menentukan penduga parameter θ berdasarkan informasi Y sebagai

$$L(\theta) = E_0\left[\left.\frac{dP_\theta}{dP_0}\right| \mathrm{Y}\right]$$

dan penduga maksimum *likelihood* didefinisikan sebagai

$$\hat{\theta} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta).$$

Secara umum penduga maksimum likelihood $\hat{\theta}$ sulit dihitung secara langsung. Algoritma EM memberikan suatu metode iteratif untuk mengaproksimasi $\hat{\theta}$, dengan prosedur sebagai berikut.

Langkah 1: Set $p = 0$ dan pilih $\hat{\theta}_0$.

Langkah 2: [Langkah-E]

Set $\theta^* = \hat{\theta}_p$ dan hitung $Q\left(\theta, \theta^*\right) = E_{\theta^*}\left[\log \left.\frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}}\right| \mathrm{Y}\right]$.

Langkah 3: [Langkah-M]

Tentukan $\hat{\theta}_{p+1} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} Q\left(\theta, \theta^*\right)$.

Langkah 4: $p \leftarrow p + 1$

Ulangi langkah 2 sampai kriteria berhenti dipenuhi.

Catatan 3.3.1

1. Barisan $\{\hat{\theta}_p : p \geq 0\}$ memberikan barisan $\{L(\hat{\theta}_p) : p \geq 0\}$ yang tak turun.
2. Menurut ketaksamaan Jensen,
$$Q\left(\hat{\theta}_{p+1}, \hat{\theta}_p\right) \leq \log L(\hat{\theta}_{p+1}) - \log L(\hat{\theta}_p).$$
3. $Q\left(\theta, \theta^*\right)$ disebut *pseudo-loglikelihood* bersyarat.

3.2 Algoritma untuk menduga parameter

Diketahui parameter model berbentuk

$$\theta = \left\{ (a_{ji}),\ 1 \le i, j \le N;\ c_i,\ 1 \le i \le N;\ \sigma_i, 1 \le i \le N \right\}.$$

Akan ditentukan parameter

$$\hat{\theta}(k) = \left\{ (\hat{a}_{ji}(k)),\ 1 \le i, j \le N;\ \hat{c}_i(k),\ 1 \le i \le N;\ \hat{\sigma}_i(k), 1 \le i \le N \right\}$$

yang memaksimumkan *pseudo-loglikelihood* bersyarat seperti pada bagian 3.1. Algoritma untuk memperoleh parameter tersebut yang diperoleh dari Setiawaty dan Kristina (2005) adalah sebagai berikut.

Algoritma untuk menentukan parameter $\hat{\theta}(k)$

Langkah 1: Tetapkan $N = 2$ (banyaknya state), $M = 88$ (banyaknya data)
Input data $\{ y_k \}$.

Langkah 2: Tetapkan Nilai awal

$$\pi = (\pi_i)_{N \times 1}$$
$$A = (a_{ji})_{N \times N}$$
$$c = (c_i)_{N \times 1}$$
$$\sigma = (\sigma_i)_{N \times 1}.$$

Catatan: $\pi = E\left[X_0 \right]$ dan memenuhi $A\pi = \pi$.

Langkah 3: Lakukan untuk $l = 0$ sampai dengan M

1. Tetapkan

   $a_i = Ae_i$, di mana e_i = vektor unit di $\Re^N$

   $\gamma_0\left(X_0 \right) = \pi$

   $\gamma_0\left(\mathbf{J}_0^{rs\,\mathrm{s}}{}_{\mathrm{r}} \right) = 0$

   $\gamma_0\left(O_0^r \right) = 0$

   $\gamma_0\left(\tau_0(y) \right) = 0$

   $\gamma_0\left(\tau_0(y^2) \right) = 0.$

2. Lakukan untuk $k = 0$ sampai dengan $l - 1$

a. Hitung penduga rekursif

$$\gamma_{k+1}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \gamma_k(X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \right\rangle a_i$$

$$\gamma_{k+1,k+1}(\mathrm{J}_{k+1}^{rs}) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \gamma_{k,k}(\mathrm{J}_k^{rs}), \Gamma^i(y_{k+1}) \right\rangle a_i + \left\langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \right\rangle a_{sr} e_s$$

$$\gamma_{k+1}(\mathrm{J}_{k+1}^{rs}) = \left\langle \gamma_{k+1,k+1}(\mathrm{J}_{k+1}^{rs}), \overline{1} \right\rangle$$

$$\gamma_{k+1,k+1}(O_{k+1}^r) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \gamma_{k,k}(O_k^r), \Gamma^i(y_{k+1}) \right\rangle a_i + \left\langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \right\rangle a_r$$

$$\gamma_{k+1}(O_{k+1}^r) = \left\langle \gamma_{k+1,k+1}(O_{k+1}^r), \overline{1} \right\rangle$$

$$\gamma_{k+1,k+1}(\tau_{k+1}^r(y)) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \gamma_{k,k}(\tau_k^r(y)), \Gamma^i(y_{k+1}) \right\rangle a_i + \left\langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \right\rangle y_{k+1} a_r$$

$$\gamma_{k+1}(\tau_{k+1}^r(y)) = \left\langle \gamma_{k+1,k+1}(\tau_{k+1}^r(y)), \overline{1} \right\rangle$$

$$\gamma_{k+1,k+1}(\tau_{k+1}^r(y^2)) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \gamma_{k,k}(\tau_k^r(y^2)), \Gamma^i(y_{k+1}) \right\rangle a_i + \left\langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \right\rangle y_{k+1}^2 a_r$$

$$\gamma_{k+1}(\tau_{k+1}^r(y^2)) = \left\langle \gamma_{k+1,k+1}(\tau_{k+1}^r(y^2)), \overline{1} \right\rangle$$

di mana:

$$\Gamma^{(\cdot)}\left(y_k\right) := \frac{\phi\left(\dfrac{y_k - c_{(\cdot)}}{\sigma_{(\cdot)}}\right)}{\sigma_{(\cdot)}\phi\left(y_k\right)}\; e_{(\cdot)}$$

$\phi(\cdot)$ adalah fungsi kepadatan peluang *N*(0,1).

$$\gamma_{k+1}\left(H_{k+1}X_{k+1}\right) := \gamma_{k+1,k+1}\left(H_{k+1}\right)$$

$$\overline{1} = (1,\ldots,1,1,1,\ldots,1) \in \Re^N .$$

a. Hitung penduga parameter

$$\hat{a}_{sr}(k+1) = \frac{\gamma_{k+1}\left(\mathrm{J}_{k+1}^{rs}\right)}{\gamma_{k+1}\left(O_{k+1}^r\right)}$$

$$\hat{c}_r(k+1) = \frac{\gamma_{k+1}\left(\tau_{k+1}^r(y)\right)}{\gamma_{k+1}\left(O_{k+1}^r\right)}$$

$$\hat{\sigma}_i(k+1) = \frac{\gamma_{k+1}\left(\tau_{k+1}^i(y^2)\right) - 2c_i\gamma_{k+1}\left(\tau_{k+1}^i(y)\right) + c_i^2\gamma_{k+1}\left(O_{k+1}^i\right)}{\gamma_{k+1}\left(O_{k+1}^i\right)}.$$

b. Tuliskan

$$\hat{A}(k+1) = \left(\hat{a}_{sr}(k+1)\right)$$

$$\hat{c}(k+1) = \left(\hat{c}_r(k+1)\right)$$

$$\hat{\sigma}(k+1) = \left(\hat{\sigma}_i(k+1)\right).$$

d. Tentukan

$\hat{\pi}(k+1)$ dari persamaan $\hat{A}(k+1)\hat{\pi}(k+1) = \hat{\pi}(k+1)$.

e. Ulangi langkah a sampai dengan d untuk *k* berikutnya.

3. Beri nilai

$$A \leftarrow \hat{A}(k)$$
$$c \leftarrow \hat{c}(k)$$
$$\sigma \leftarrow \hat{\sigma}(k).$$

4. Ulangi langkah 1 sampai dengan 3 untuk *l* berikutnya.

Langkah 4: Untuk $k = 1$ sampai dengan M , cetak

$$\hat{A}(k),\ \hat{\pi}(\mathrm{k}), \hat{c}(k),\ \hat{\sigma}(k),\ \gamma_k(X_k)$$

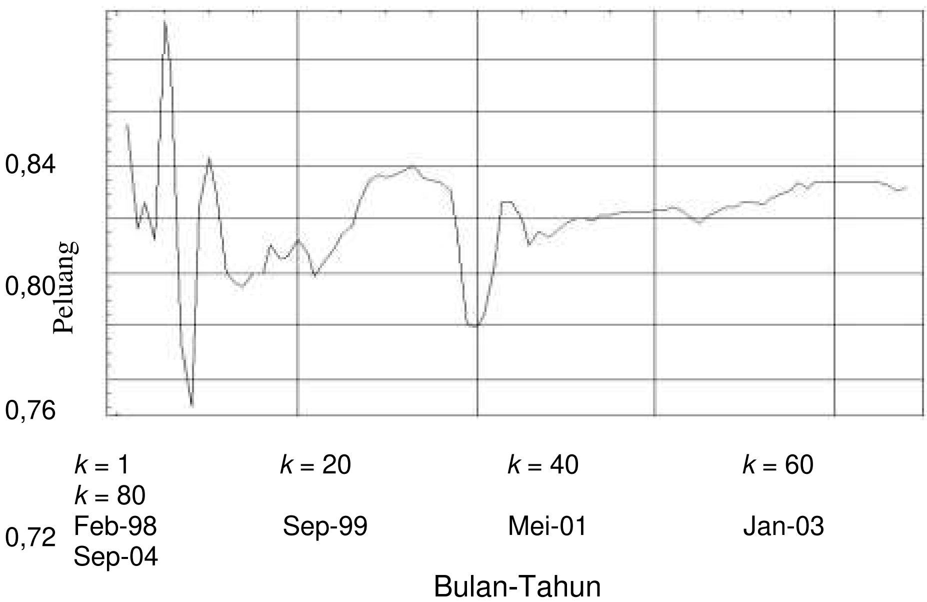
4. INTERPRETASI MODEL

Dari algoritma di atas dibuat programnya menggunakan *Mathematica* 5.2.

Dari hasil *run* program pada bagian 3 untuk $N = 2$ diperoleh parameter model sebagai berikut.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0.071 & 0.152 \\ 0.929 & 0.848 \end{pmatrix},\quad \hat{c} = \begin{pmatrix} 9094.365 & 9094.613 \end{pmatrix},\quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 2277.793 & 1659.249 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

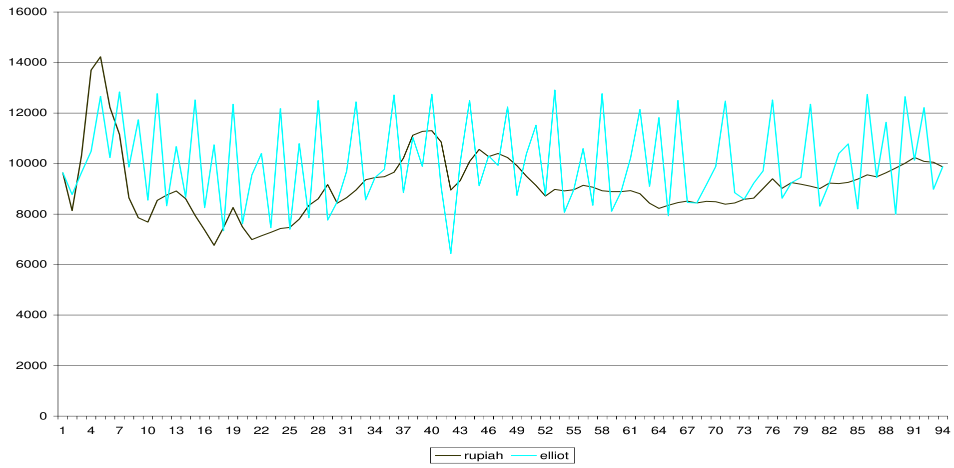
Pada *state*-1, nilai tukar Rupiah terhadap $US mempunyai rataan $\hat{c}_1 = 9094.365$ dan simpangan $\hat{\sigma}_1 = 2277.794$. Pada *state*-2, nilai tukar Rupiah terhadap $US mempunyai rataan $\hat{c}_1 = 9094.613$ dan simpangan $\hat{\sigma}_1 = 1659.249$.



Gambar 4.1. Grafik Peluang $P\left(X_k = 2 \mid y_1, y_2, ..., y_k\right)$

Dari Grafik 4.1. terlihat bahwa jika $P\left(X_k = 2 \mid y_1, y_2, ..., y_k\right)$ mendekati 1 maka nilai Rupiah mengalami lonjakan yang cukup berarti. Hal ini menunjukkan bahwa nilai $P\left(X_k = 2 \mid y_1, y_2, ..., y_k\right)$ dapat dijadikan indikator untuk melihat terjadi lonjakan drastis pada nilai tukar Rupiah.

Perbandingan nilai tukar Rupiah dengan nilai harapannya yang ditunjukkan oleh Grafik 4.2 berikut. Karena galat antara nilai tukar Rupiah dengan nilai harapannya cukup besar, maka nilai harapan dari model Elliott ini tidak dapat dipakai sebagai alat untuk memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap US Dollar.



Gambar 4.2. Grafik nilai tukar Rupiah terhadap US Dollar menggunakan model Elliot

6. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari uraian di atas terlihat bahwa menggunakan model Elliott et.al. (1995), pemodelan nilai tukar Rupiah tingkat akurasinya tidak terlalu baik, oleh sebab itu perlu penelitian lanjutan menggunaan model lain, misalnya dengan memperhitungkan nilai tukar sebelumnya sehingga merupakan suatu deret waktu seperti model Hamilton (1994).

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Baum,L.E. and Petrie, T. 1966. Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37:1554-1563.

[2]. Elliot, R. J., Aggoun, L. dan Moore, J. B. 1995. *Hidden Markov models*, Springer Verlag, New York.

[3]. Hamilton, J. D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

[4]. Setiawaty, B. dan Kristina, L. 2005. Pendugaan parameter model *Hidden* Markov. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol: 4, No.1.